习题课 Green公式 Gauss公式 Stokes公式

一．Green定理的应用。

1. 计算线积分，其中为，逆时针为正向。

解：记，。不难验证。因此向量场是无旋场。记，逆时针为正向。在由正方形和椭圆所围成的有界域上，应用Green公式的旋度形式得

。对线积分再应用Green公式的旋度形式得。解答完毕。

1. 设为有界开区域，它的边界是逐段光滑曲线，是的外单位法向量，设函数，且在内为调和函数，即，。求证：

(i) ；

(ii) ；

(iii) 若在边界上，，求证， 。

解： (i)由于,。（应用Green公式散度形式）。

(ii) 

。（这里用到了假设。）

(iii) 由(ii)的结论可知，若，，则，。

即，，，所以，从而，

。证毕。

1. 已知函数在整个实轴上二次连续可微，满足，且使得微分式

是全微分，求，并使由到逐段光滑曲线上积分的值为。

解：由假设微分式是全微分，故

，

即。

这是关于未知函数的二阶常系数线性常微分方程。根据线性ODE一般理论知，对应的齐次方程通解为。

另一方面不难看出方程 有一个特解。

因此原方程的通解为。

关于函数的两个条件，条件，以及条件由到逐段光滑曲线上积分的值为，可以唯一确定两个常数，。

对求导得

 ，， 。

于是，。



由到积分得

，

解得。于是。解答完毕。

1. 设是实轴上处处为正的连续函数，为圆心在原点的单位开圆盘。

证明：(i)；

(ii)。

证明：对等式(i)的两边线积分，分别应用Green公式的旋度形式得

左边，右边。

由于积分区域为单位圆盘，故上述两个二重积分相等。因此等式(i)成立。

注：对上任何一个二重积分中，作变量代换，就得到另一个二重积分。

(ii) 类似，我们不难看出 ，。

这表明，在如下两个二重积分中，

 和 。

将被积函数中的变元换为，并不改变积分的值。因此

。

由于,故 。

1. 设, 在上连续，在内存在连续偏导数．．若在上满足方程 ．为有向曲线的外单位法向量，求极限 。

解：．利用格林公式第二种形式得到











.

（洛必达法则）

1. 计算积分：,

路径为沿任一条不与轴相交的曲线。

解： 由于 ,

 =

==,



=

1. 设在上半平面内，函数具有连续偏导数,且对任意的都有，证明: 对L内的任意分段光滑的有向简单闭曲线L,都有。

解：由两边对t求导得：

.

令,记 ,

; 



=，

由于是单连通域，又有满足, 这样, 于是对L内的任意分段光滑的有向简单闭曲线L, 都有 。

二．Gauss公式

1. 设为由圆锥面:和平面所围成的圆锥体。

(i) 证明设此圆锥体的体积可以表示为，其中为区域的边界曲面，为其单位外法向量，．

(ii) 圆锥体的体积也可以表示为 ，其中为圆锥的底面积，为圆锥的高．

证明： (i) 根据Gauss公式得，

故。

（注：这个结论不仅仅对圆锥体成立，而是一个一般性结论：任何有界立体，其体积均可以表为，其中为单位外法向量。）

(ii) 由于，其中记锥面部分，记底面部分．因为锥面的顶点在原点，其

上每一点的法向量与径向垂直，故。为平面的一部分，其单位法向量为．注意到在上，点的位置向量与正法向成锐角。因此



其中为圆锥的底面积，而为原点到平面

的距离，也就是圆锥的高．故

。解答完毕。

1. 设一元函数在上连续可导,且对于任何位于半空间中

的光滑有向封闭曲面，有。进一步假设。求。

解：对于。作以为球心，以为半径的闭球。取充分小，可以使得。于是由假设得

。根据Gauss公式有

，即

。

再根据三重积分的中值定理可知存在，使得

。令即得

。

由于是任意的，故 ，。

这是一阶线性常微分方程，根据求解公式得可知其通解为。

进一步由假设，可以确定。因此。

三．Stokes公式

1. 利用Stokes公式计算积分, 其中为圆周



从Ox轴的正向看去, 圆周的正向为逆时针方向.

解:前面（见第一部分题1）我们利用的参数方程直接计算出了积分。利用Stokes公式计

算则更简单。记为由圆周在平面上所围的部分（闭圆盘），其正法向与轴

正向成锐角。由Stokes公式得



其中为的单位正法向。由假设知.简单计算知



于是



其中为平面在球面部分内的面积. 解答完毕。

1. 设有向曲线是平面与球面的交线，从轴正向看去为逆时针为正向。求第二类曲线积分。

解：由球面方程可知，。

记为平面上包含于球面内的部分，规定的正法向与轴的正向成锐角。记。则积分可写作

。

简单计算得。根据Stokes公式得。

注意到的单位正法向，于是

。

1. 计算高斯积分，其中为一个不经过原点的光滑封闭曲面，其中为上点处的单位外法线向量，，．

**解**：记。则 .简单计算表明，证向量场的散度恒为零，即．因此当不包围原点时，向量场在由

所包围的闭区域内连续可微。因此利用Gauss公式立知面积分。

当包含围原点时，原积分等于向量场关于球面:（外侧）上的第二型面积分．于是

。

1. （P.230,10）